Das
Markscheidewesen

Fachzeitschrift für Bergvermessung und Geoinformation, Lagerstättenbearbeitung und Bergbauplanung, Gebirgsbewegungen und Bergschäden

103. Jahrgang
Zeitschrift
Das Markscheidewesen

Benecke:
Verarbeitung photogrammetrisch erzeugter Höhenmodelle im Geo-Informationssystem der Ruhrkohle AG

Albrecht, Röttig:
Untersuchungen zur Sensibilität des Gradientenkriging

Kratzsch:
Abschätzung und Minderung der Abbaueinwirkung auf Schächte
– Teil I –

Jahrgang 103 (1996) · Heft 3
Verlag Glückauf GmbH · Essen

Matthias Albrecht und Andree Röttig

Untersuchungen zur Sensibilität des Gradientenkriging

1. Einleitung

Zur Vorhersage und Beschreibung von räumlichen Phänomenen auf den Gebieten Geowissenschaften, Umweltwissenschaften sowie Markscheidewesen und Geodäsie, insbesondere auch zur Vorhersage von Gebirgs- und Lagerstättenparametern, stehen eine Reihe unterschiedlicher Interpolationsmethoden und -verfahren zur Verfügung:

- Spline-Interpolation,
- inverse Distanzschätzungen und
- Kriging-Methoden unter geostatistischen Modellannahmen.

Alle diese Methoden haben gemeinsam, daß sie, ausgehend von vorliegenden Beobachtungen $z(x_i,y_i)$ eines Parameters Z an Beobachtungsstellen $(x_i,y_i)\in R^2$ i=l,...,n, Werte des Parameters Z auf einem festgelegten Gitter durch Interpolation schätzen. Zur zusätzlichen Berücksichtigung von Gradienten von Z, die lokale Änderungen in den Funktionswerten von Z beschreiben, wurde von Menz [1, 2, 3] ein spezielles Kriging-Verfahren entwickelt, welches von Röttig [4] programmtechnisch umgesetzt wurde.

Um die Wirkungsweise und die Stabilität des entwickelten Verfahrens, welches als Gradientenkriging bezeichnet werden kann, zu überprüfen, wurden Sensibilitätsuntersuchungen bezüglich des Einflusses der Änderung von Eingangsgrößen auf die erzielten Krigingergebnisse anhand eines synthetischen Beispiels durchgeführt. Als variierende Eingangsgrößen wurden dabei untersucht:

- die Reichweite der Kovarianzfunktion des Parameters Z und
- die Größe einer Regularisierungskonstante, durch deren zusätzliche Berücksichtigung eine Verbesserung der Kondition der Krigematrix erreicht werden soll.

Zur Einschätzung der Ergebnisse des Gradientenkrigings und zur geeigneten Wahl der Regularisierungskonstante wurden folgende Kriterien herangezogen:

- visuelle Auswertung der Differenzenplots zwischen den gegebenen und den durch Kriging erzielten Werten,
- Mittelwert der Differenzen,
- Standardabweichung der Differenzen und
- Konditionszahlen der Krigematrix.

Die erzielten Ergebnisse werden in tabellarischer und in graphischer Form zusammengefaßt.

2. Theoretische Grundlagen des Gradientenkriging

Sei $Z(x,y)$ ein differenzierbares stochastisches Feld über dem R^2 mit der Kovarianzfunktion

$$K_Z((x_1,y_1),(x_2,y_2))\text{-}Cov(Z(x_1,y_1),Z(x_2,y_2)) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Das stochastische Feld $Z(x,y)$ heißt stationär zweiter Ordnung, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind

$$EZ(x,y) = m \quad \forall (x,y)\in R^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1a)$$

$$K_Z((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = K_Z((x_1,y_1)\text{-}(x_2,y_2)) \quad \forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in R^2, \quad (1b)$$

Gilt zusätzlich noch die Bedingung

$$K_Z((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = K_Z(\|(x_1,y_1),(x_2,y_2)\|) \quad \forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in R^2 \quad (1c)$$

so wird $Z(x,y)$ als isotrop bezeichnet. Nach den Bedingungen (1a) und (1c) besitzt ein stationäres, isotropes stochastisches Feld zweiter Ordnung einen konstanten Erwartungswert und die Kovarianzfunktion hängt weder vom Ort noch von der Richtung der berücksichtigten Punkte, sondern lediglich von deren Abstand zueinander ab.

Da $Z(x,y)$ als differenzierbar vorausgesetzt wurde, existieren die partiellen Ableitungen

$$Z_x(x,y) = \frac{\partial Z(x,y)}{\partial x} \text{ und } Z_y(x,y) = \frac{\partial Z(x,y)}{\partial y}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

die nach Sweschnikoff [5] als Ableitungen „im quadratischen Mittel" definiert sind durch

$$\lim_{\Delta\to 0} E\left| \frac{Z(x+\Delta,y)-Z(x,y)}{\Delta} - Z_x(x,y) \right|^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Z_x und Z_y sind selbst wieder stationäre, isotrope stochastische Felder zweiter Ordnung, deren Kovarianzfunktionen sich aus $K_z(x,y)$ ableiten lassen. Es gilt:

$$K_{Z_x}(x,y) = -\frac{\partial^2 K_Z(x,y)}{\partial x^2} \text{ bzw. } K_{Z_y}(x,y) = -\frac{\partial^2 K_Z(x,y)}{\partial y^2} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Die Kreuzkovarianzfunktionen zwischen den Feldern Z, Z_x und Z_y lassen sich ebenfalls aus $K_z(x,y)$ nach folgenden Formeln ableiten:

$$K_{ZZ_x}(x,y) = \frac{\partial K_Z(x,y)}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$K_{ZZ_y}(x,y) = \frac{\partial K_Z(x,y)}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$K_{Z_xZ_y}(x,y) = \frac{\partial^2 K_Z(x,y)}{\partial x \partial y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Als Modelle zur Beschreibung der räumlichen Abhängigkeiten in stochastischen Feldern finden in der Geostatistik häufig die exponentielle, sphärische oder Gaußsche Kovarianzfunktion Verwendung. Da beim hier beschriebenen Gradientenkriging das stochastische Feld $Z(x,y)$ und damit auch dessen Kovarianzfunktion $K_Z(x,y)$ als differenzierbar vorausgesetzt wurden, eig-

net sich lediglich die Gaußsche Funktion als Kovarianzmodell, da die anderen beiden Funktionen im Nullpunkt nicht differenzierbar sind. Damit ergeben sich für ein isotropes stochastisches Feld mit Gaußscher Kovarianzfunktion folgende Auto- und Kreuzkovarianzfunktionen für die abgeleiteten Prozesse:

$$K_Z(x,y) = \sigma^2\exp(-\alpha^2(x^2+y^2)) \quad \ldots\ldots (8)$$

$$K_{ZZ_x}(x,y) = -2\alpha^2 x\sigma^2\exp(-\alpha^2(x^2+y^2)) \quad \ldots\ldots (9)$$

$$K_{ZZ_y}(x,y) = -2\alpha^2 y\sigma^2\exp(-\alpha^2(x^2+y^2)) \quad \ldots\ldots (10)$$

$$K_{Z_xZ_x}(x,y) = -2\alpha^2\sigma^2(2\alpha^2x^2-1)\exp(-\alpha^2(x^2+y^2)) \quad \ldots\ldots (11)$$

$$K_{Z_yZ_y}(x,y) = -2\alpha^2\sigma^2(2\alpha^2y^2-1)\exp(-\alpha^2(x^2+y^2)) \quad \ldots\ldots (12)$$

$$K_{Z_xZ_y}(x,y) = 4\alpha^4 xy\ \sigma^2\exp(-\alpha^2(x^2+y^2)) \quad \ldots\ldots (13)$$

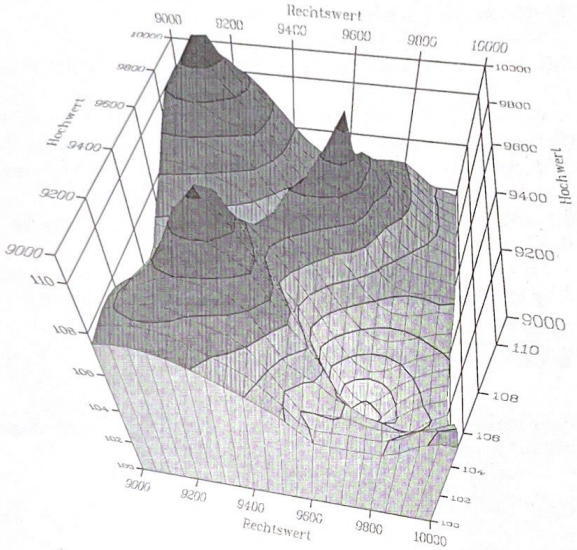

Bild 1. Räumliche Darstellung des für die Sensibilitätsuntersuchungen verwendeten synthetischen Gebirges.

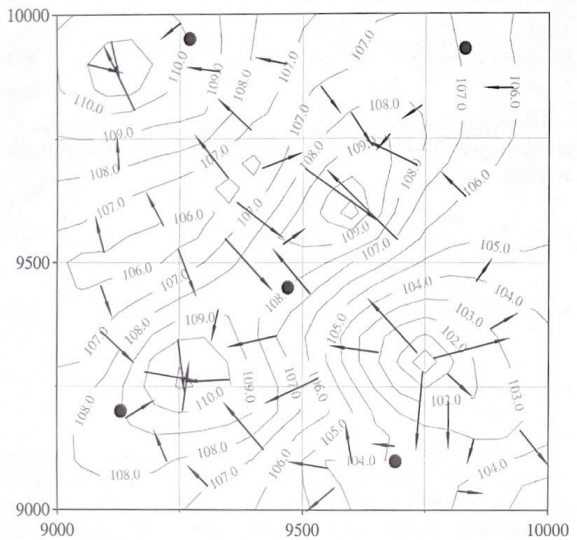

Bild 2. Räumliche Lage der Stützwerte (•) und der Gradienten (→), auf deren Grundlage das Gradientenkriging durchgeführt wurde.

Es seien nun neben den n Beobachtungen z_i des Parameters Z (als Realisierungen des stochastischen Feldes $Z(x,y)$)

$$z_i = Z(x_i,y_i) \quad (x_i,y_i)\in R^2 \quad i=1,\ldots,n \quad \ldots\ldots (14)$$

p Gradienten $\nabla z_j = (z_{xj},z_{yj})^T$ von Z (als Realisierungen der stochastischen Felder $Z_x(x,y)$ und $Z_y(x,y)$)

$$\nabla z_j = (Z_x(x_j,y_j),\ Z_y(x_j,y_j))^T \quad (x_j,y_j)\in R^2 \quad j=1,\ldots,p \quad \ldots\ldots (15)$$

gegeben. Zu schätzen ist nun der Wert des Parameters Z an der Stelle $(x_0,y_0)\in R^2$ unter der gleichzeitigen Berücksichtigung der Beobachtungswerte z_i und der Gradienten ∇z_j. Zur Schätzung von $Z(x_0,y_0)$ verwendet man einen linearen Ansatz der Form

$$\check{Z}(x_0,y_0) = \sum_{i=1}^{n} w_i z(x_i,y_i) + \sum_{j=1}^{p} b_j z_x(x_j,y_j) + \sum_{j=1}^{p} c_j z_y(x_j,y_j) \quad \ldots\ldots (16)$$

Die unbekannten Koeffizienten w_i $i=1,\ldots,n$ und b_j,c_j $j=1,\ldots,p$ sind so zu bestimmen, daß
(i) die Schätzung $\check{Z}(x_0,y_0)$ erwartungstreu ist, das heißt

$$E(Z(x_0,y_0) - \check{Z}(x_0,y_0)) = 0 \quad \ldots\ldots (17)$$

(ii) der erwartete quadratische Fehler von $\check{Z}(x_0,y_0)$ minimal wird unter Beachtung der Bedingung der Erwartungstreue (17)

$$\min_{\substack{w_i\ i=1,\ldots,n\\ b_j c_j\ j=1,\ldots,p\\ \text{Nebenbed. (17)}}} E(\,Z(x_0,y_0) - \check{Z}(x_0,y_0)\,)^2 \quad \ldots\ldots (18)$$

Die Lösung dieses Problems führt auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems der Form

$$\begin{pmatrix} \Sigma_Z & \Sigma_{ZZ_x} & \Sigma_{ZZ_y} & 1 \\ \Sigma_{Z_xZ} & \Sigma_{Z_x} & \Sigma_{Z_xZ_y} & 0 \\ \Sigma_{Z_yZ} & \Sigma_{Z_yZ_x} & \Sigma_{Z_y} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w \\ b \\ c \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_Z((x_i,y_i),(x_0,y_0)) \\ K_{Z_x}((x_j,y_j),(x_0,y_0)) \\ K_{Z_y}((x_j,y_j),(x_0,y_0)) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots (19)$$

oder, in Matrixschreibweise,

$$\Sigma\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}, \quad \ldots\ldots (20)$$

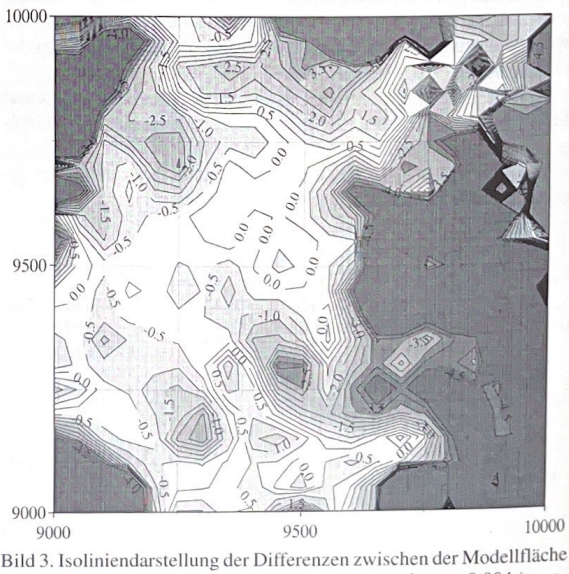

Bild 3. Isoliniendarstellung der Differenzen zwischen der Modellfläche und den mit Gradientenkriging erhaltenen Werten für $\alpha = 0.004$ (angepaßte Reichweite) und $add = 0$.

wobei sich die Werte der Kovarianzmatrizen Σ_Z, Σ_{ZZx}, ... aus den entsprechenden Kovarianzfunktionen K_z, K_{ZZx}, ... durch Einsetzen der Koordinaten der Beobachtungspunkte und Gradienten berechnen lassen. Für Einzelheiten siehe Menz [1].

Der Form nach ist das von Menz eingeführte Gradientenkriging ein Cokriging mit drei Parametern. Es besitzt jedoch insoweit eine spezielle Struktur, als daß die Kovarianzfunktionen der einzelnen Parameter und die Kreuzkovarianzfunktionen zwischen ihnen nach den Formeln (4) bis (7) miteinander verknüpft sind.

3. Sensibilitätsuntersuchungen

Zur Durchführung der Sensibilitätsuntersuchungen zum Gradientenkriging wurde zunächst der räumliche Verlauf eines Parameters Z synthetisch durch die Überlagerung von Funktionen auf einem Gebiet von 1 000 x 1 000 m erzeugt. Die durch den Parameter Z beschriebene Oberfläche ist in Bild 1 graphisch dargestellt. Auf einem regelmäßigen Gitter von 26 x 26 Punkten mit einer Maschenweite von 40 m wurden anschließend sowohl die Werte des Parameters Z als auch der Gradienten in x- und y-Richtung abgegriffen, auf deren Basis die räumliche Schätzung der verschiedenen Auto- und Kreuzkovarianzfunktionen (4) bis (7) erfolgte. An diese geschätzten Kovarianzfunktionen wurden die entsprechenden Kovarianzmodelle (8) bis (13) in einem einheitlichen Prozeß durch die Bestimmung der Größen α und σ angepaßt. Für beide Größen ergab sich:

$\alpha = 0.004 \qquad \sigma = 2.4$

Es konnte festgestellt werden, daß zwischen den empirischen Kovarianzfunktionen und den gewählten Modellen eine gute Anpassung erzielt wurde.

Auf dem oben angegebenen Gitter, auf denen die exakten Werte des Parameters Z vorliegen, wurden anschließend sowohl ein normales Kriging mit 73 Stützwerten als auch ein Gradientenkriging mit 5 Stützwerten und 54 Gradienten zur Vorhersage von Z durchgeführt. Die Lage der Stützstellen und der Gradienten ist in Bild 2 dargestellt.

Ein häufig auftretendes Phänomen bei der Verwendung Gaußscher Kovarianzfunktionen bzw. Variogrammodelle ohne Nuggeteffekt ist, daß die damit erzielten Krigingergebnisse praktisch kaum verwendbar sind. Dies liegt vor allem darin begründet, daß die Gaußsche Kovarianzfunktion zu einer schlechten Kondition der Krigematrix führt, wie unter anderem bei Posa [6] und Diamond/Armstrong [7] festgestellt wurde. Um einen Ausweg aus dieser Situation zu erzielen, gibt es aus numerischer Sicht die Möglichkeit der Regularisierung, das heißt man löst anstelle des Gleichungssystems (20) ein modifiziertes Problem durch die Addition einer Regularisierungskonstante auf die Hauptdiagonale der Krigematrix und löst damit das Ersatzproblem

$$(\Sigma + add\, I_{n+2p+1})\, u = v \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

welches, in Abhängigkeit von der Größe von *add*, zu stabileren Ergebnissen führt. Aus geostatistischer Sicht entspricht dieses

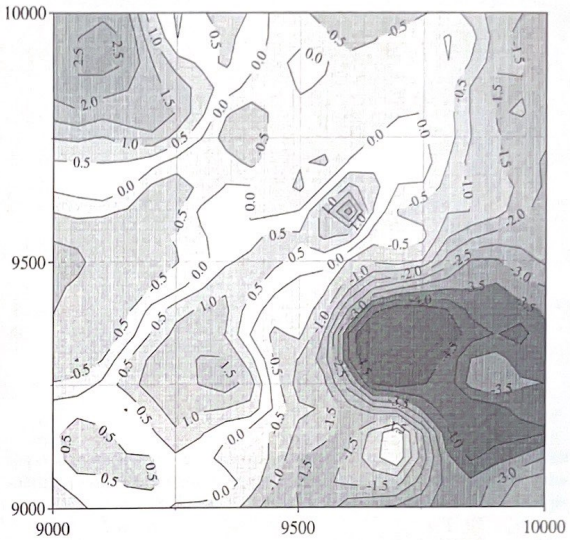

Bild 5. Isoliniendarstellung der Differenzen zwischen der Modellfläche und den mit Gradientenkriging erhaltenen Werten für $\alpha = 0.0125$ (Fehlspezifikation) und $add = 0$.

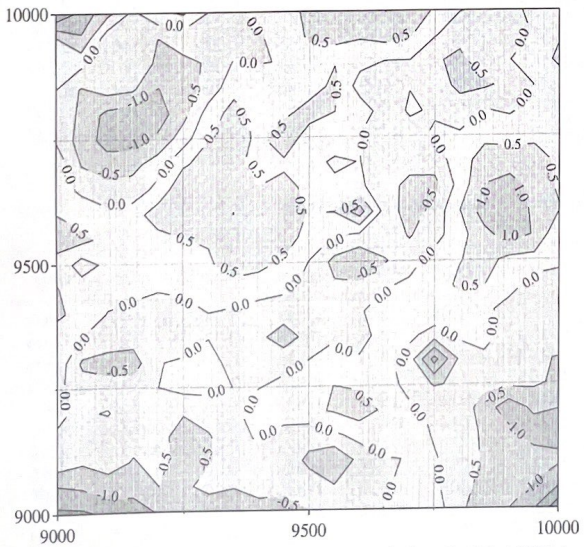

Bild 4. Isoliniendarstellung der Differenzen zwischen der Modellfläche und den mit Gradientenkriging erhaltenen Werten für $\alpha = 0.004$ (angepaßte Reichweite) und $add = 0.1$ (Optimum).

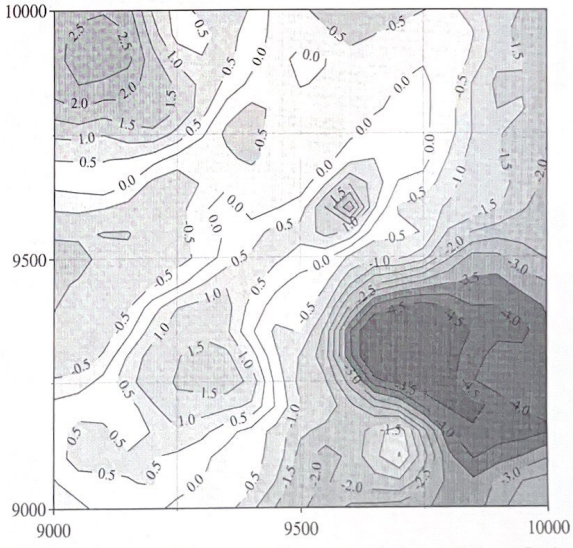

Bild 6. Isoliniendarstellung der Differenzen zwischen der Modellfläche und den mit Gradientenkriging erhaltenen Werten für $\alpha = 0.0125$ (Fehlspezifikation) und $add = 0.1$ (Optimum).

Vorgehen der Berücksichtigung eines zusätzlichen Nuggeteffektes in der Kovarianzfunktion. Damit stellt sich sofort die Frage, in welcher Größenordnung *add* zu wählen ist, um vernünftige und stabile Ergebnisse zu erhalten. Dieser Fragestellung wird unter anderem in der nun folgenden Sensibilitätsuntersuchung nachgegangen.

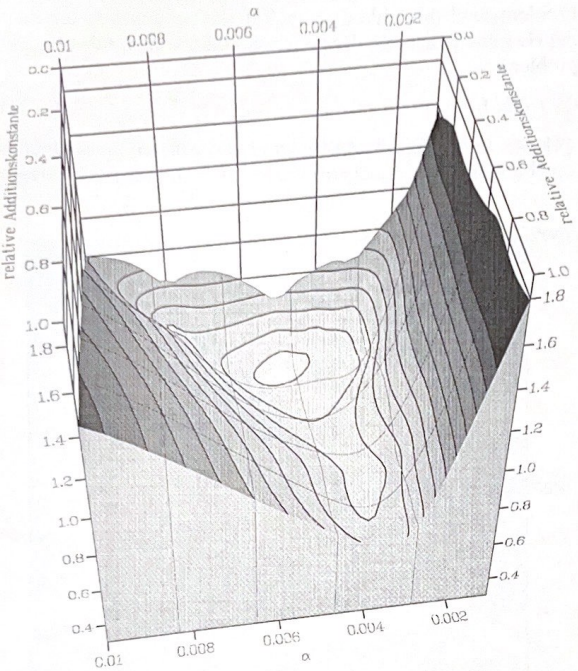

Bild 7. Graphische Darstellung der Mittelwerte der Differenzen zwischen Modellfläche und den durch Kriging erzielten Werten in Abhängigkeit von α und add.

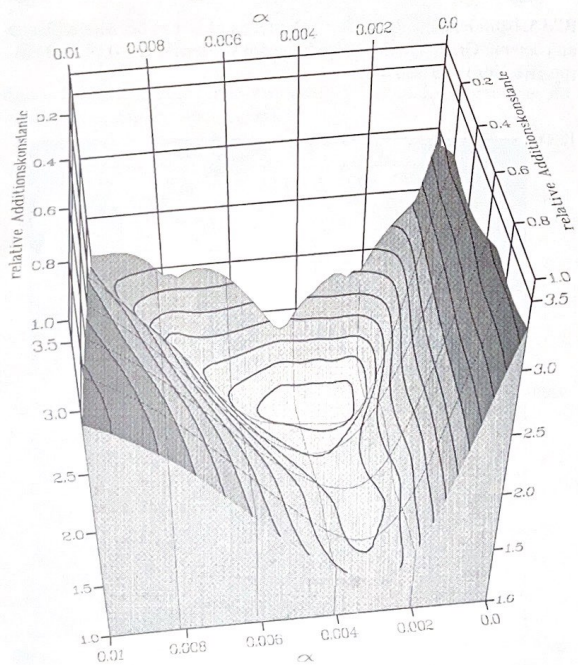

Bild 8. Graphische Darstellung der Standardabweichungen der Differenzen zwischen Modellfläche und den durch Kriging erzielten Werten in Abhängigkeit von α und add.

Zur Durchführung der Sensibilitätsuntersuchungen wurden das normale Kriging und das Gradientenkriging mit unterschiedlichen Werten für die Reichweite der Kovarianzfunktion α und der relativen Regularisierungskonstante *add* bezüglich der Größe der Hauptdiagonalelemente der Krigematrix durchgeführt. Die Berechnungen erfolgten für die beiden Größen in den folgenden Abstufungen

$\alpha = 0.001 \quad 0.003 \quad 0.004 \quad 0.005 \quad 0.008 \quad 0.01$

add = 1.0E-6 1.0E-5 1.0E-4 1-0E-3 1-0E-2 3.0E-2
5.0E-2 7.5E-2 1-0E-1 1.5E-1 2.0E-1 7.0E-1
1.0E+0

Die qualitative Einschätzung der Güte der Ergebnisse der beiden Krigingverfahren für die jeweiligen Kombinationen von α und *add* erfolgte zunächst durch einen visuellen Vergleich der zugrundeliegenden Modellfläche und der durch Kriging interpolierten Werte von Z an den Gitterpunkten. Insbesondere wurden dabei die Isoliniendarstellungen der Differenzen zwischen den wahren Werten und den durch Kriging erhaltenen Werten betrachtet, um einzuschätzen, in welcher Größenordnung sich die Abweichungen bewegen und ob sich systematische Strukturen in den Abweichungen wiederfinden lassen. Graphische Darstellungen für gut und schlecht gewählte Größen von α und *add* sind in den Bildern 3 bis 6 zu finden. Die quantitative Einschätzung der Krigingergebnisse erfolgte durch die Berechnung des Mittelwertes und der Standardabweichung der Differenzen. Diese Ergebnisse wurden in tabellarischer, teils graphischer Form

Tabelle 1. Mittelwerte der Differenzen zwischen Modellwerten und geschätzten Werten von Z für das normale Kriging.

add	0,001	0,003	0,004	0,005	0,008	0,01
0	8,666	1,323	1,051	0,827	0,399	0,285
1.0E-6	0,436	0,729	0,791	0,757	0,398	0,285
1.0E-5	0,481	0,619	0,628	0,649	0,396	0,284
1.0E-4	0,508	0,504	0,541	0,514	0,376	0,283
1.0E-3	0,592	0,381	0,463	0,448	0,321	0,271
1.0E-2	0,713	0,298	0,339	0,367	0,265	0,244
3.0E-2	0,785	0,296	0,282	0,301	0,232	0,231
5.0E-2	0,816	0,302	0,257	0,265	0,212	0,225
7.5E-2	0,842	0,312	0,242	0,238	0,193	0,223
1.0E-1	0,861	0,323	0,237	0,221	0,181	0,223
1.5E-1	0,889	0,343	0,239	0,201	0,163	0,234
2.0E-1	0,911	0,362	0,246	0,191	0,161	0,252
7.0E-1	1,022	0,501	0,362	0,296	0,341	0,462
1.0E+0	1,022	0,555	0,419	0,362	0,432	0,553

Tabelle 2. Mittelwerte der Differenzen zwischen Modellwerten und geschätzten Werten von Z für das Gradientenkriging.

add	0,001	0,003	0,004	0,005	0,008	0,01
0	1485,03	8,891	4,841	3,759	1,045	1,006
1.0E-6	1,505	2,618	3,909	2,778	1,044	1,006
1.0E-5	1,252	1,703	2,113	2,141	1,036	1,006
1.0E-4	1,136	1,256	1,028	1,267	0,981	1,006
1.0E-3	1,333	0,858	0,831	0,681	0,838	1,005
1.0E-2	1,542	0,622	0,559	0,519	0,631	1,003
3.0E-2	1,571	0,569	0,471	0,423	0,587	1,012
5.0E-2	1,591	0,547	0,439	0,384	0,605	1,026
7.5E-2	1,605	0,528	0,431	0,366	0,638	1,046
1.0E-1	1,623	0,516	0,419	0,366	0,673	1,066
1.5E-1	1,656	0,511	0,431	0,383	0,735	1,104
2.0E-1	1,681	0,498	0,431	0,408	0,789	1,139
7.0E-1	1,778	0,616	0,589	0,684	1,103	1,369
1.0E+0	1,792	0,711	0,691	0,801	1,208	1,451

zusammengefaßt. Um den Einfluß der Größe der Regularisierungskonstante auf die Kondition der Krigematrix und damit auch auf die durch das Kriging erzielten Ergebnisse zu veranschaulichen, wurden die reziproken Konditionszahlen der Krigematrizen berechnet und in den Tabellen 5 und 6 wiedergegeben.

4. Ergebnisse

– Die beim visuellen Vergleich der Differenzen zwischen den Modellwerten und den durch Kriging geschätzten Werten von Z gewonnenen Erkenntnisse über die Güte des Krigings bezüglich der Variation der Größen α und *add* finden sich in den berechneten Mittelwerten und Standardabweichungen der Differenzen wieder (Tabellen 1 bis 4).
– Die Wahl der Reichweite α und der Regularisierungskonstante *add* übt einen wesentlichen Einfluß auf die Güte der Krigingergebnisse aus.
– Durch eine geeignete Wahl der Regularisierungskonstante *add* konnte eine wesentliche Verbesserung der Konditionszahl der Krigematrix erzielt werden, was sich unmittelbar auf die Güte der Krigingergebnisse auswirkt.
– Die generell schlechteren Konditionszahlen für das Gradientenkriging, verglichen mit den Konditionszahlen für das normale Kriging, liegen in der größeren Dimension der Krigematrix beim Gradientenkriging begründet.
– In einem Bereich von [0.003;0.005]x[3.0E-2;2.0E-1] für α und *add* zeigen die Krigingergebnisse ein sehr stabiles Verhalten und eine gute Übereinstimmung mit der Modellfläche von Z.

Tabelle 3. Standardabweichungen der Differenzen zwischen Modellwerten und geschätzten Werten für das normale Kriging.

add	0,001	0,003	0,004	0,005	0,008	0,01
0	102,95	3,072	2,472	1,904	0,851	0,591
1.0E-6	0,772	1,476	1,794	1,766	0,849	0,591
1.0E-5	0,865	1,186	1,249	1,439	0,843	0,589
1.0E-4	0,911	0,933	0,994	0,994	0,798	0,585
1.0E-3	1,034	0,637	0,851	0,807	0,648	0,555
1.0E-2	1,282	0,479	0,586	0,668	0,495	0,481
3.0E-2	1,399	0,487	0,462	0,535	0,423	0,448
5.0E-2	1,442	0,507	0,418	0,461	0,382	0,437
7.5E-2	1,473	0,532	0,396	0,404	0,347	0,434
1.0E-1	1,495	0,557	0,391	0,368	0,323	0,437
1.5E-1	1,526	0,601	0,398	0,331	0,296	0,454
2.0E-1	1,551	0,639	0,416	0,318	0,294	0,481
7.0E-1	1,674	0,886	0,633	0,511	0,587	0,798
1.0E+0	1,674	0,973	0,732	0,625	0,736	0,941

Tabelle 4. Standardabweichungen der Differenzen zwischen Modellwerten und geschätzten Werten für das Gradientenkriging.

add	0,001	0,003	0,004	0,005	0,008	0,01
0	11 115,97	28,341	12,839	8,632	2,468	2,179
1.0E-6	2,869	8,105	12,221	6,659	2,465	2,178
1.0E-5	2,063	4,353	5,698	5,575	2,446	2,178
1.0E-4	1,861	2,988	2,301	3,002	2,305	2,178
1.0E-3	2,541	1,834	1,729	1,326	1,948	2,174
1.0E-2	2,961	1,029	1,083	0,981	1,436	2,156
3.0E-2	2,928	0,861	0,842	0,811	1,288	2,155
5.0E-2	2,941	0,826	0,759	0,741	1,301	2,137
7.5E-2	2,967	0,814	0,731	0,708	1,355	2,203
1.0E-1	2,997	0,816	0,719	0,706	1,418	2,237
1.5E-1	3,053	0,835	0,728	0,738	1,541	2,303
2.0E-1	3,097	0,864	0,758	0,791	1,649	2,365
7.0E-1	3,272	1,219	1,147	1,349	2,266	2,761
1.0E+0	3,301	1,405	1,351	1,518	2,458	2,892

– Im betrachteten Beispiel hat sich die geschätzte Reichweite von $\alpha = 0.004$ bestätigt und eine relative Regularisierungskonstante von 0.1 als optimal erwiesen.
– Bei einer Fehlspezifikation der Reichweite α der Kovarianzfunktion spiegelt sich die Struktur des synthetischen Gebirges im Differenzenplot zwischen der Modellfläche und den durch Kriging erzielten Werten wider. In diesem Fall bewirkt auch die Regularisierungskonstante nicht viel.

Tabelle 5. Mittlere reziproke Konditionszahlen der Krigematrizen für das normale Kriging.

add	0,001	0,003	0,004	0,005	0,008	0,01
0	4.7E-13	9.0E-08	2.2E-06	1.7E-05	4.1E-04	1.3E-03
1.0E-6	2.8E-08	1.2E-07	2.2E-06	1.7E-05	4.1E-04	1.3E-03
1.0E-5	2.8E-07	4.2E-07	2.5E-06	1.7E-05	4.1E-04	1.3E-03
1.0E-4	2.8E-06	3.3E-06	5.8E-06	2.1E-05	4.2E-04	1.3E-03
1.0E-3	2.7E-05	3.0E-05	3.6E-05	5.5E-05	4.6E-04	1.3E-03
1.0E-2	2.7E-04	2.9E-04	3.2E-04	3.6E-04	8.4E-04	1.7E-03
3.0E-2	8.1E-04	8.6E-04	9.0E-04	1.0E-03	1.6E-03	2.6E-03
5.0E-2	1.4E-03	1.4E-03	1.5E-03	1.6E-03	2.4E-03	3.5E-03
7.5E-2	2.0E-03	2.1E-03	2.2E-03	2.4E-03	2.4E-03	4.6E-03
1.0E-1	2.7E-03	2.8E-03	2.9E-03	3.1E-03	3.3E-03	5.6E-03
1.5E-1	4.1E-03	4.2E-03	4.4E-03	4.6E-03	6.0E-03	7.5E-03
2.0E-1	5.4E-03	5.6E-03	5.8E-03	6.1E-03	7.7E-03	9.4E-03
7.0E-1	1.9E-02	1.9E-02	2.0E-02	2.0E-02	2.3E-02	2.5E-02
1.0E+0	1.9E-02	2.8E-02	2.8E-02	2.9E-02	3.2E-02	3.4E-02

Tabelle 6. Mittlere reziproke Konditionszahlen der Krigematrizen für das Gradientenkriging.

add	0,001	0,003	0,004	0,005	0,008	0,01
0	1.8E-19	9.2E-13	2.3E-10	1.1E-09	2.1E-07	1.5E-06
1.0E-6	4.0E-13	5.5E-12	2.6E-10	1.3E-09	2.2E-07	1.6E-06
1.0E-5	4.0E-12	4.3E-11	5.6E-10	1.4E-09	2.2E-07	1.6E-06
1.0E-4	4.0E-11	4.0E-10	3.2E-09	2.7E-09	2.2E-07	1.6E-06
1.0E-3	3.9E-10	3.9E-09	7.7E-09	1.5E-08	2.6E-07	1.6E-06
1.0E-2	3.9E-09	3.8E-08	7.2E-08	1.3E-07	6.7E-07	2.4E-06
3.0E-2	1.2E-08	1.1E-07	2.1E-07	3.6E-07	1.5E-06	4.0E-06
5.0E-2	1.9E-08	1.9E-07	3.5E-07	5.9E-07	2.2E-06	5.4E-06
7.5E-2	2.9E-08	2.8E-07	5.2E-07	8.7E-07	3.1E-06	7.0E-06
1.0E-1	3.8E-08	3.8E-07	7.0E-07	1.2E-06	4.0E-06	8.6E-06
1.5E-1	5.7E-08	5.6E-07	1.0E-06	1.7E-06	5.7E-06	1.2E-05
2.0E-1	7.5E-08	7.5E-07	1.4E-06	2.3E-06	7.3E-06	1.4E-05
7.0E-1	2.4E-07	2.6E-06	4.7E-06	7.6E-06	2.2E-05	3.8E-05
1.0E+0	3.3E-07	3.7E-06	6.7E-06	1.1E-05	3.1E-05	5.1E-05

Quellennachweis

1. Menz, J.: Geostatistische Vorhersage des Schichtenverlaufs im Gebirge auf der Grundlage von Bohrungen, Stoßbemusterungen und geophysikalischen Messungen. In: *Das Markscheidewesen 98* (1991), Heft 2, S. 70–73.
2. Menz, J.: Zur Berücksichtigung von Gradienten bei der geostatistischen Vorhersage. Beiträge zur Mathematischen Geologie und Geoinformatik, Bd. 3 (1992), Sven von Loga, Köln, S. 40–47.
3. Menz, J.: Beitrag zur markscheiderisch-geologischen Komplexauswertung unter geostatistischen Modellannahmen. In: *Das Markscheidewesen 99* (1992), Heft 4, S. 320–323.
4. Röttig, A.: Anschauungsbeispiele zur Berücksichtigung von Gradienten bei der geostatistischen Vorhersage. In: *Das Markscheidewesen 99* (1992), Heft 4, S. 324–329.
5. Sweschnikoff, A. A.: Untersuchungsmethoden der Theorie der Zufallsfunktionen mit praktischen Anwendungen. Teubner Verlag, Leipzig, 1965.
6. Posa, D.: Conditioning of the Stationary Kriging Matrices for Some Well-Known Covariance Models. Mathematical Geology, Vol. 21, No. 7 (1989), S. 755–765.
7. Diamond, P., und Armstrong, M.: Robustness of Variograms and Conditioning of Kriging Matrices. Mathematical Geology, Vol. 16 (1984), S. 809–822.