



SCHRIFTENREIHE des BDG

Heft Nr. 14

W. Linnenberg (Hrsg.)

# Einsatz von DV-Methoden im Umweltbereich

*4. Jahrestagung der  
Fachsektion Geoinformatik der  
Deutschen Geologischen Gesellschaft*

08. - 09. März 1995 im Bergbaumuseum Bochum

ISBN 3-9803528-3-8

Berufsverband Deutscher  
Geologen, Geophysiker und Mineralogen

# Inhaltsverzeichnis

	Seite
Vorwort	
Inhaltsverzeichnis	
<b>I. RÖDDER</b>	
Simulation als Methode zur Untersuchung der Theorie der Plattentektonik.....	1
<b>J. MENZ</b>	
Kreuzkorrelationen und ihre Berücksichtigung bei der geostatistischen Vorhersage.....	5
<b>M. ALBRECHT &amp; A. RÖTTIG</b>	
Konditionierung von Krige-Matrizen .....	7
<b>F. BIRKENHAKE, H. BURGER &amp; V. WEBER,</b>	
Ein geostatistisches Verfahren zur optimalen Allokation von Bohrungen in Zusammenhang mit der UVP für bergbauliche Betriebe.....	11
<b>S. LINDNER</b>	
Optimale Meßstellenplanung mit Hilfe geostatistischer Verfahren .....	17
<b>A. RÖTTIG &amp; M. JÄKEL</b>	
Modellierung einer teilweise bedeckten Gesteinsoberfläche unter Zuhilfenahme von a-priori-Informationen, Fallstudie im Umweltbereich .....	21
<b>B. STEINBACH</b>	
Modellierung von Umweltdaten durch Boolesche Funktionen.....	25

U. DUTSCHMANN Fallstudie einer (geo-)statistischen Modellierung eines industriellen Altstandortes .....	29
J. MENZ, D. TZSCHARSCHUCH & U. KAISER Nutzung geostatistischer Verfahren zur Massenermittlung und -bewertung für Bergbau und Umweltschutz .....	33
J. GOTTHARDT & O. RÜBER Der Einsatz von 3-dimensionalen Grundwassermodellen als praxisbezogene Grundlage für Wasserwerksplanung, Sanierung und Umweltverträglichkeitsprüfung .....	39
B. HAFERKORN, H. MANSEL & D. SAMES Modellierung des Grundwasser-Wiederanstiegs in Bergbaugebieten unter besonderer Berücksichtigung von Tagebau-Restlöchern .....	43
B. PFÜTZNER Wasserhaushaltsmodellierung innerhalb des Bodeninformations- systems des Umlandverbandes Frankfurt .....	49
H.-J. DIERSCH & I. MICHELS 3D-Finite-Element-Modellierung von Strömungs-, Schadstoff- und Wärmetransportprozessen im Grundwasser mit freien und ohne freie Oberflächen .....	53
C. JOPPE Automatisierte Erkennung geologischer Lineationen in digitalen Fernerkundungsbildern - Möglichkeiten und Grenzen .....	57
H. THIERGÄRTNER Grenzen der Anwendung von DV-Methoden auf industriellen Altstandorten? .....	61
H. PUNDT Untersuchungen zum Einsatz wissensbasierter Ansätze zur Unterstützung der Erfassung und Analyse ökologischer Daten .....	65

M. BLUHM, P. REINIRKENS, H. NEITE & U. STREIT Erstellung digitaler Bodenbelastungskarten - Berücksichtigung von Vorinformationen für Interpolationsverfahren .....	69
G.J. PESCHEL & U. KNÖCHEL Modellierung von Deponien und Altlasten durch geoelektrische Tomographie .....	73
D. DOHERR GIS-gestütztes kommunales Lärmausbreitungsmodell .....	85
W. BECKRÖGE & H. FLEER Abschätzung von Kfz-Immissionsbelastungen in Städten.....	89
L. BERNARD SKIMO-3 - Ein GIS-gestütztes dreidimensionales Mesoskalen-Modell zur numerischen Simulation der nächtlichen Wind-, Temperatur- und Feuchtefelder für den Einsatz in der Umweltplanung .....	95
S. HANUSCH & U. LABUDE Ein wissensbasiertes System zur Planung der Wiedernutzbarmachungsarbeiten im Tagebau.....	97
S. GANTER, C. LINDENBECK, R. PFLUG & H. ULMER Geometrische Modellierung der Grube Schauinsland bei Freiburg im Breisgau.....	101
A. CHRISTMANN & A. DOSTER Auswertungen und Darstellungen von Altlastenuntersuchungen.....	105
F. TONN Einsatzmöglichkeiten der geostatistischen Simulation im Umweltbereich .....	111

## Konditionierung von Krige-Matrizen

M. ALBRECHT & A. RÖTTIG<sup>1</sup>

### Einleitung

Zur Beschreibung und Vorhersage räumlicher Merkmale aus zahlreichen Wissenschaftsgebieten stellt die Geostatistik eine große Anzahl unterschiedlicher Krigingmethoden zur Verfügung, u.a.

- ordinary Kriging,
- universelles Kriging,
- Cokriging,
- Gradientenkriging,
- Indikatorkriging.

Die Modellierung der räumlichen Abhängigkeit der interessierenden Merkmale erfolgt über Variogramme bzw. Kovarianzfunktionen. Deren typischste Vertreter sind

- die Gauß'sche,
- die exponentielle,
- die sphärische Kovarianzfunktion und
- der Nugget-Effekt,

sowie Kombinationen aus ihnen, insbesondere des Nugget-Effektes mit einem der anderen Modelle.

Ein bei der praktischen Anwendung der verschiedenen Krigingmethoden häufig auftretender Effekt ist, daß bei Verwendung der Gauß'schen Kovarianzfunktion ohne Nugget-Effekt stark verfälschte bzw. sogar unbrauchbare Krigingergebnisse erzielt werden, während bei anderen Kovarianzmodellen diese Schwierigkeiten nicht zu beobachten sind. Mit den Ursachen dieses Effektes und deren Beseitigung beschäftigt sich der vorliegende Beitrag.

### Theorie

Sei  $Z$  ein stochastisches Feld, stationär 2-ter Ordnung, isotrop, mit der Kovarianzfunktion  $K(h)$ . Dann führt das ordinary Kriging

$$\hat{Z}_0 = \mathbf{w}^T \mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

als linearer, erwartungstreuer Schätzer mit minimaler Varianz auf die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \Sigma & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

bzw. auch in Kurzform

$$\tilde{\Sigma} \tilde{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{c}} \quad (3)$$

<sup>1</sup> Dr. Matthias Albrecht & Andree Röttig, TU Bergakademie Freiberg, Institut für Markscheidewesen und Geodäsie, Agricolastraße 1, 09599 Freiberg

Der relative Fehler bei der Lösung des Gleichungssystems (3) läßt sich nach DIAMOND & ARMSTRONG (1984) wie folgt abschätzen

$$\frac{\|\Delta w\|}{\|w\|} \leq \frac{2 \delta \text{cond}(\tilde{\Sigma})}{1 - \delta \text{cond}(\tilde{\Sigma})} \quad (4)$$

wobei  $\delta$  die relative Genauigkeit der Bestimmung der Kovarianzfunktion beschreibt. Es sei  $K_0(h)$  die "wahre" Kovarianzfunktion und  $K(h)$  die gewählte, für die gelte

$$1 - \delta \leq \frac{1 - K_0(h)}{1 - K(h)} \leq 1 + \delta \quad (5)$$

Maßgebend für die relative Genauigkeit der Gewichte und damit für die Genauigkeit der Krigeschätzung selbst ist somit die Konditionszahl der Matrix  $\tilde{\Sigma}$ .

Wieso kommt es nun zu einer schlechten Kondition der Krigematrix ausgerechnet bei der Gauß'schen Kovarianzfunktion, während bei den anderen dieses Problem nicht auftritt? Betrachten wir zur Klärung Abbildung 1.

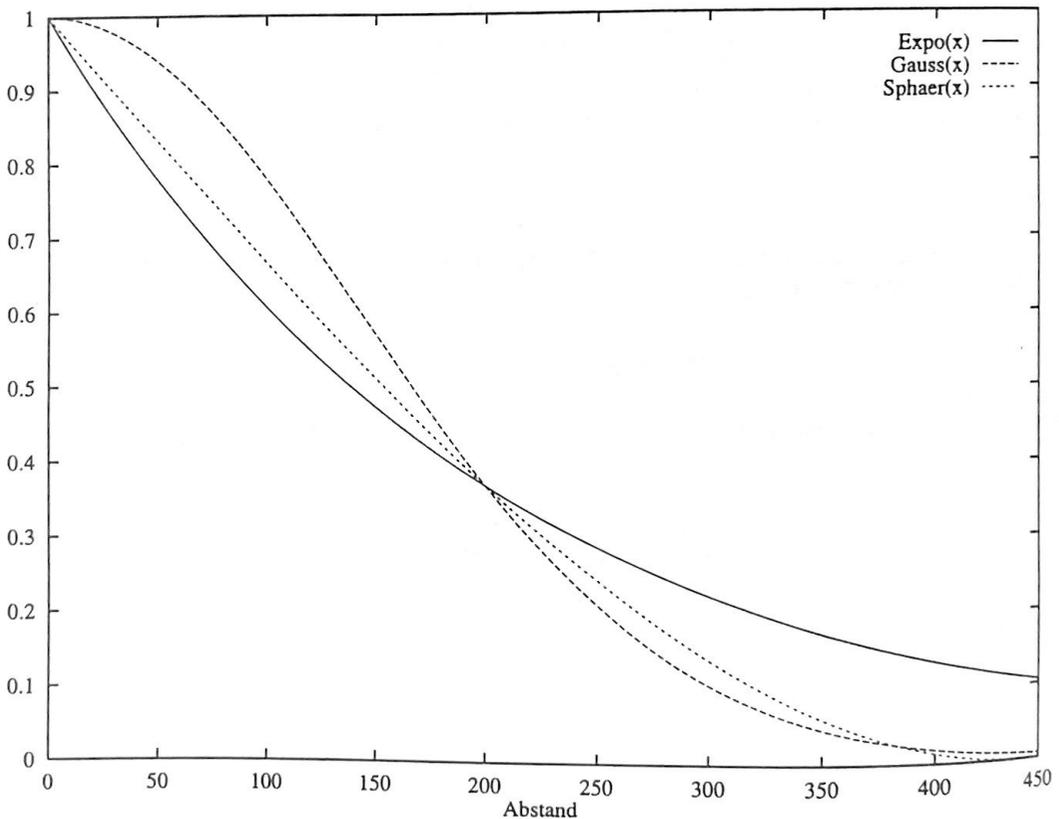


Abbildung 1: Veranschaulichung des unterschiedlichen Verhaltens der Gauß'schen, exponentiellen und sphärischen Kovarianzfunktion in der Nähe des Koordinatenursprungs.

Ist der Abstand der beim Kriging verwendeten Stützstellen relativ klein bzgl. der Reichweite der Kovarianzfunktion, so ist festzustellen, daß die Gauß'sche Kovarianzfunktion nur einen minimalen negativen Anstieg besitzt. Dies führt dazu, daß sich die Eintragungen in der Krigematrix zeilen- bzw. spaltenweise nur unwesentlich voneinander unterscheiden, was die schlechte Kondition bewirkt. Da die exponentielle und die sphärische Kovarianzfunktion auch bei kleineren Abständen noch über einen explizit ausgewiesenen negativen Anstieg verfügen, tritt dieser Effekt nicht auf.

Zur Reduzierung der Konditionszahl von Matrizen bei schlecht konditionierten Gleichungssystemen gibt es aus numerischer Sicht die Möglichkeit der Regularisierung. Anstelle des Gleichungssystems (3) löst man das Ersatzproblem

$$\left( \tilde{\Sigma} + \text{add } I_{n+1} \right) \tilde{w}_{\text{add}} = c \quad (6)$$

d.h., auf die Hauptdiagonale der Krigematrix wird eine positive Konstante addiert. Aus geostatistischer Sicht entspricht dieses Vorgehen der Einführung eines zusätzlichen Nugget-Effektes im Kovarianzmodell. Daraus leitet sich unmittelbar die Frage ab, wie groß die Regularisierungskonstante zu wählen ist, um eine vernünftige Kondition und brauchbare Krigingergebnisse zu erzielen. Zur Beantwortung dieser Frage wurden eine Vielzahl numerischer Untersuchungen durchgeführt.

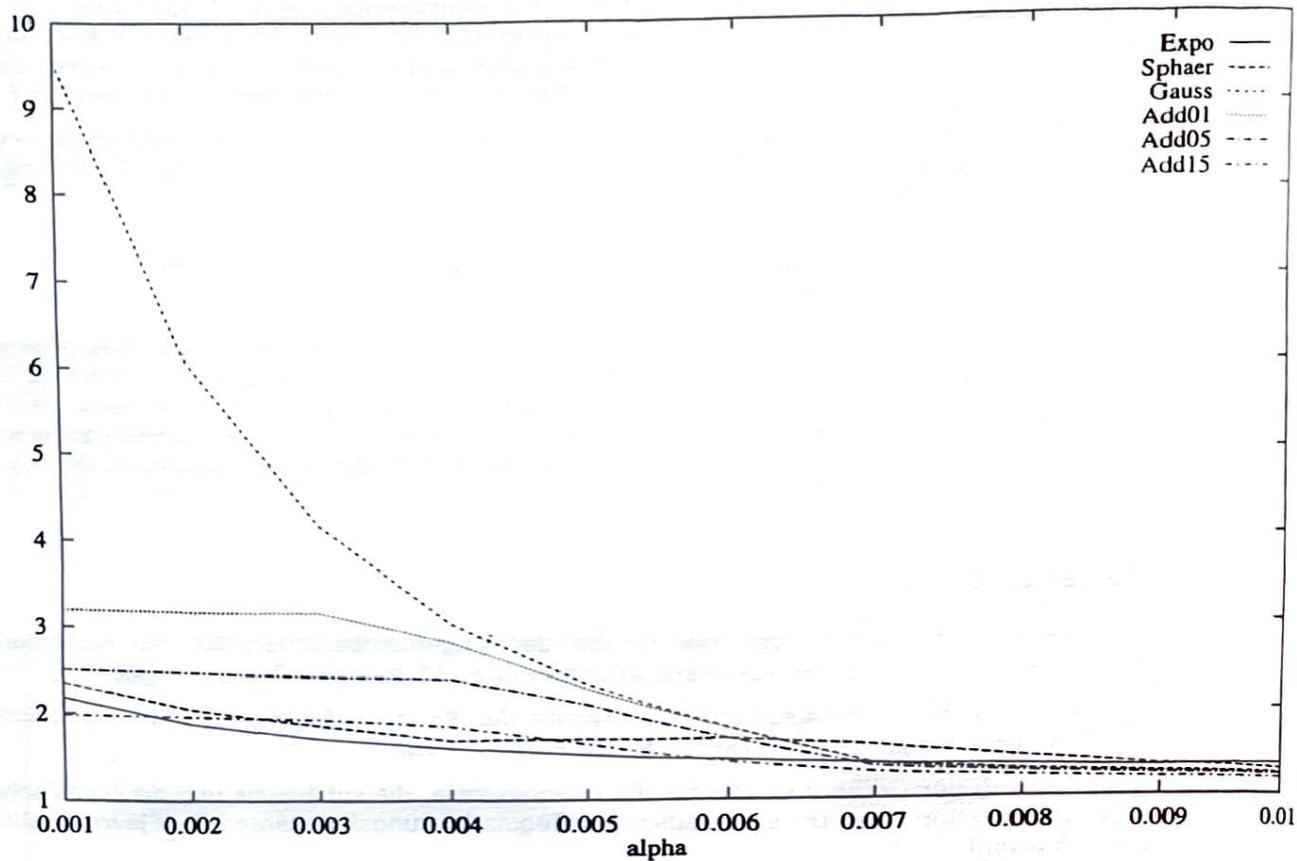
#### Numerische Untersuchungen

- Untersuchung des Einflusses der Größe der Krigenachbarschaft auf die Kondition: Betrachtungen von drei Punktkonstellationen mit 8, 16 bzw. 24 Punkten.
- Untersuchung des Einflusses der Reichweite der Kovarianzfunktion auf die Kondition: Berechnungen für jeweils 10 verschiedene Reichweiten.
- Durchführung der Berechnungen für die exponentielle, die sphärische und die Gauß'sche Kovarianzfunktion mit unterschiedlichen Regularisierungskonstanten bei jeweils ähnlichem Verlauf.

#### Ergebnisse

Die Regularisierungskonstante wurde als geeignet angesehen, wenn die Konditionszahl bei Verwendung der Gauß'schen Kovarianzfunktion in die Größenordnung der für die exponentielle bzw. sphärische Kovarianzfunktion gedrückt werden konnte. Dies wurde bei einer relativen Regularisierungskonstante von 5-20% bzgl. der Streuung erreicht. Eine graphische Veranschaulichung dieses Ergebnisses ist in der Abbildung 2 zu sehen.

Diese Ergebnisse konnten bei Untersuchungen an einem synthetischen Beispielgebirge, bei dem der direkte Vergleich zwischen vorliegenden und durch Kriging erzielten Werten durch eine Analyse der Residuen möglich war, bestätigt werden.



**Abbildung 2:** Darstellung der logarithmierten Konditionszahlen in Abhängigkeit von der Reichweite für verschiedene Kovarianzfunktionen und Regularisierungskonstanten für das Gauß'sche Modell.

**Literatur**

DIAMOND & ARMSTRONG (1984): Robustness of Variograms and Conditioning of Kriging Matrices. - Math. Geology, Bd.16, Nr. 8.

POSA (1989): Conditioning of the Stationary Kriging Matrices for Some Well-Known Covariance Models. - Math. Geology, Bd.21, Nr. 7.