

Das Markscheidewesen

Fachzeitschrift für Lagerstättenbearbeitung, Bergvermessung, Bergbauplanung und Raumordnung, Bergschadenkunde

Stelling:

Das Markscheidewesen am Rammelsberg – ein Beitrag zur Berufsgeschichte

Eichholz:

Ableitung aller Bewegungselemente des Senkungstrogos aus einer Wachstumsfunktion

Kloy:

Senkungsvorausberechnung in geneigter und steiler Lagerung

Freudenberg, Lehmann und Plümer:

Computergestützte Korrelation geologischer Schichten

Menz:

Beitrag zur markscheiderisch-geologischen Komplexauswertung unter geostatistischen Modellannahmen

Röttig:

Anschauungsbeispiele zur Berücksichtigung von Gradienten bei der geostatistischen Vorhersage

Leonhardt:

Gefahrenerkennung – eine wichtige betriebliche Aufgabe des Werksmarkscheiders

Jahrgang 99 (1992) · Heft 4
Verlag Glückauf GmbH · Essen

Anschauungsbeispiele zur Berücksichtigung von Gradienten bei der geostatistischen Vorhersage

Grundlage dieses Beitrags sind drei Veröffentlichungen von J. Menz in dieser Zeitschriftenreihe. In [1]* wurde die mathematische Ableitung zu einem Vorhersageverfahren unter geostatistischen Modellannahmen, das die Änderungen von Lagerstättenparametern mittels Gradienten berücksichtigt, vorgestellt. Gedanken und Strategien zur Komplexauswertung von Daten aus Bohrungen, Stoßbemusterungen und geophysikalischen Messungen werden in [2] und [3] zur Diskussion gestellt. An dieser Stelle sollen erste Erfahrungen bei der praktischen Umsetzung und Anwendung der theoretischen Überlegungen zum Gradientenkriging erläutert werden. Um die Richtigkeit der Theorie experimentell nachwei-

* Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf den Quellennachweis am Schluß des Aufsatzes.

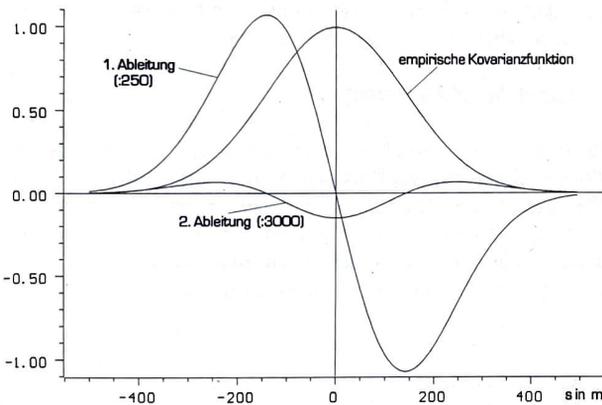


Bild 1. Empirische Kovarianzfunktion und deren 1. und 2. Ableitung.

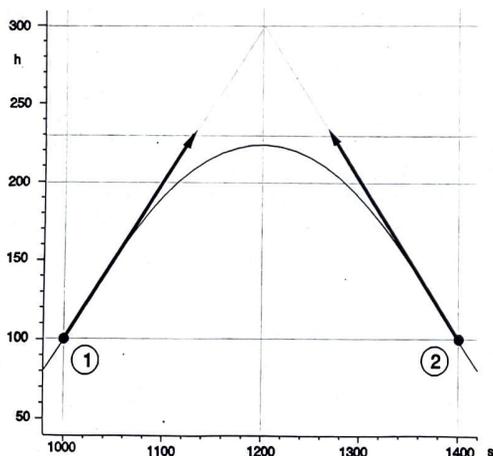


Bild 2. Profilvorhersage einer Kuppe mit je zwei Stützpunkten und Gradienten.

sen zu können, war es wegen des umfangreichen Rechenaufwandes notwendig, die wesentlichen Algorithmen zum Verfahren zu programmieren. In der ersten Testphase suchte man auch Antworten auf die folgenden Fragen:

▷ Folgt in Profilen der Verlauf der Vorhersage dem Betrag und der Richtung der Gradienten zwischen zwei Stützpunkten?

▷ Läßt sich die innere Geometrie einer Fläche ausnahmslos durch Gradienten erfassen?

▷ Inwieweit ist eine Rekonstruktion der Struktur einer Fläche mit wenigen Stützpunkten und ausgewählten Gradienten möglich?

▷ Wieviel Gradienten sind für die Rekonstruktion notwendig?

▷ Wo müssen diese Gradienten liegen?

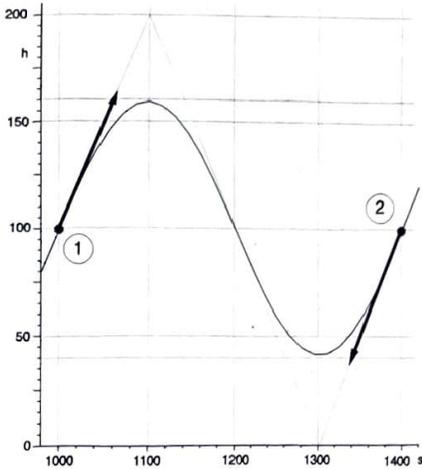
▷ In welchem Verhältnis stehen die Einflüsse der Stützpunkte bzw. der Gradienten auf die Vorhersagestelle?

▷ Rechtfertigt die Qualität der Ergebnisse, den erhöhten Rechenaufwand (wesentliche Erweiterung des Gleichungssystems zum universellen Kriging)?

Mit den bisherigen Untersuchungen war es möglich, eine Reihe von Fragen zu beantworten. Ein vollständiges und abschließendes Ergebnis zu den aufgeworfenen Problemen konnte mit den vorliegenden Resultaten noch nicht erreicht werden.

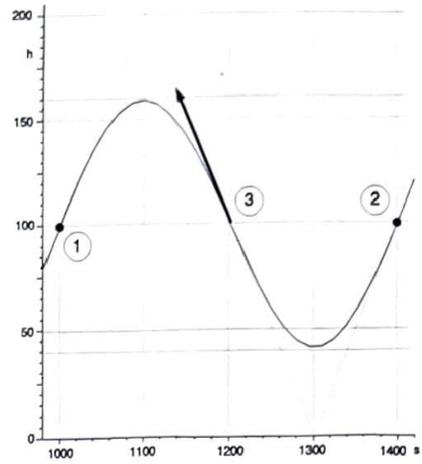
Programmtechnische Umsetzung des Gradientenkrigings

Am Anfang eines solchen Projekts steht immer die schwierige Entscheidung, verwendet man bereits existierende Software und erweitert sie um die benötigten Bausteine, oder erstellt man mit erheblichem Zeitaufwand eine völlig neue Software. Zur Realisierung des Gradientenkrigings wurde nach Abwägen der Vor- und Nachteile der zweite Weg beschritten. Obwohl das Verfahren auf dem bekannten (universellen) Kriging bzw. Cokriging aufbaut und diese als Untermenge beinhaltet, wurde eine eigenständige Entwicklung betrieben. Ein einheitliches Datenkonzept wäre unter dem Blickwinkel zukünftiger Entwicklungen und der engen Verzahnung bestehender und neuer Algorithmen unmöglich gewesen. Man wäre bei der Verwendung von schon existierenden Programmen an deren Struktur und an deren Beschränkungen, die jede Software hat, gebunden. Außerdem sollte man den Aufwand, sich in fremde Algorithmen einzuarbeiten, nicht unterschätzen. Weitere Gründe sind, daß fast alle Geostatistikprogramme, deren Quellen zudem noch verfügbar sind (z. B. GEO-EAS), in FORTRAN geschrieben sind und daß im Institut für Markscheidewesen der Bergakademie Freiberg bereits ausführlich beschriebene Algorithmen aus dem geostatistischen Baustein im Projekt ISOLIN vorliegen [4, 5]. Das Programm muß den speziellen Anforderungen der



mit je zwei Stützpunkten und Gradienten

Bild 3. Vorhersage einer vollständigen Schwingung.



mit zwei Stützpunkten und einem Gradienten

Untersuchung anpaßbar bzw. mit den fortschreitenden Ergebnissen der laufenden Forschung unkompliziert erweiterbar sein.

Aus den in [1] vorgestellten Ableitungen ist ersichtlich, daß in Abhängigkeit der im Einwirkungskreis liegenden Stützpunkte und Gradienten sehr große Gleichungssysteme zu lösen sind. Sie entstehen durch die Berücksichtigung der partiellen Ableitungen in x- und y-Richtung. Demzufolge geht ein beliebig im Raum liegender Gradient im Gegensatz zum Stützpunkt mit zwei Gleichungen in das zu lösende Gleichungssystem ein. Um die innere Geometrie einer Fläche mit im Verhältnis zur Gradientenzahl sehr wenigen Stützpunkten, wie in [3] beschrieben, in der Vorhersage wiederherzustellen, ist es notwendig, vollständig zu kriegen bzw. möglichst viele der vorhandenen Gradienten und Stützpunkte an jedem Rasterpunkt zur berücksichtigen. Es ist vorauszusehen, daß es zu erheblichen Speicherkapazitäts- und Rechenzeitproblemen, vor allem bei dichten Rastern, kommen wird. Deshalb wird vorzugsweise während der Untersuchungsphase das Betriebssystem UNIX und die Programmiersprache C für zweckmäßig angesehen.

Die Software ist in der ersten Entwicklungsstufe für die Tests und Untersuchungen ein ausschließlich numerisches Programm mit eigenem Datenkonzept. Es sind Schnittstellen zum DXF-Format und zum GRID-Format des Programms Surfer für die graphische Darstellung der Berechnungsergebnisse in anderen Systemen vereinbart worden.

In der ersten Untersuchungsphase sollte die Richtigkeit der theoretischen Überlegungen experimentell nachgewiesen werden. Dabei wurde vorerst auf simulierte bzw. reale Daten verzichtet. Die Überprüfung erfolgte an einfachen vorgegebenen, konstruierten Beispielen, bei denen man zur Beurteilung der Vorhersageergebnisse einen bestimmten Verlauf erwarten konnte.

Untersuchung des Verfahrens

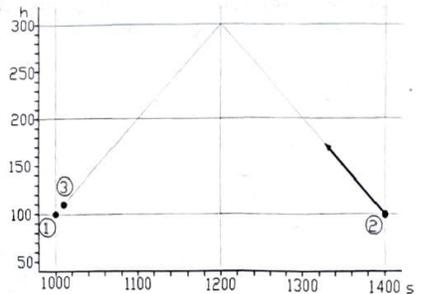
Eindimensionale Vorhersage

Als Sonderfall der zweidimensionalen Vorhersage ist die Schätzung in Profilen im Berechnungsverfahren enthalten. Durch den Wegfall einer Richtung verringert sich die Zahl der Gleichungen für die Gradienten um die Hälfte und trägt zur besseren Übersichtlichkeit bei. Eine weitere Vereinfachung wurde durch die sicher gerechtfertigte Beschränkung der empirischen Kovarianzfunktion auf den Ausdruck

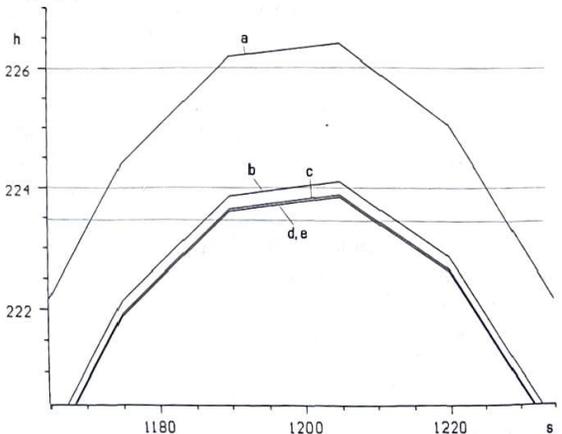
$\sigma = e^{-\alpha^2 s^2}$ (1)

herbeigeführt. Gerade deren Ableitungen verursachen numerische Probleme beim Lösen des Gleichungssystems. Die empirische Kovarianzfunktion und deren 1. und 2. Ableitung für den Parameter $\alpha = 0,005$, der ein Maß für die Abnahme der Nachbarschaftsbeeinflussung ist, zeigt Bild 1.

Der zu schätzende Lagerstättenparameter soll in allen Fällen eine Schichtgrenze sein. Bei den folgenden Profilen wurde stets vollständig gekrigt. Für die Beispiele der Bilder 2 und 3 gingen jeweils zwei Stützpunkte im Abstand von 400 m

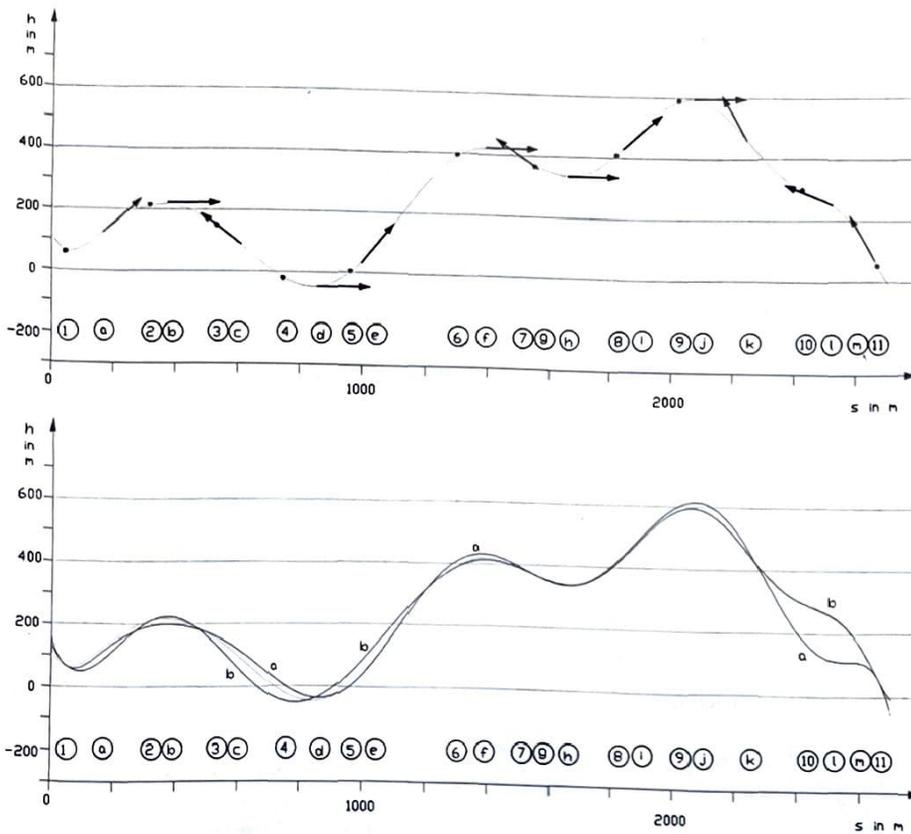


Eingangsgrößen



Vorhersage (Ausschnitt im Bereich des Maximums)

Bild 4. Profilvorhersage einer Kuppe mit drei Stützpunkten und einem Gradienten.



- a) Vergleichskurve mit Eingangsgrößen
- b) Vorhersageergebnisse durch Streichung von Stützpunkten und Gradienten

Bild 5. Vorhersage im unregelmäßigen Profil.

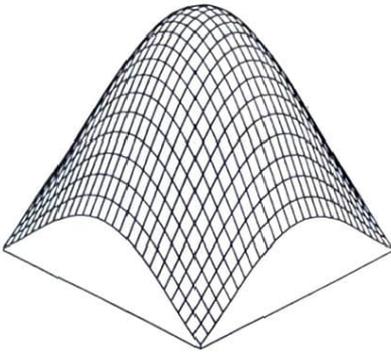
mit einer Höhe von 100 m in die Vorhersage ein. Die Schichtneigung wird an den Stützpunkten mit 50 gon vorgegeben. Sie wird in den Bildern 2 bis 4 durch die Tangenteneinheitsvektoren dargestellt und im Programm durch die entsprechenden Gradienten berücksichtigt, die wegen $\tan(50 \text{ gon})$ hier den Betrag „eins“ haben. Die gepunkteten Linien sind die Verlängerungen der Tangenteneinheitsvektoren, die sich an der Stelle $s = 1200 \text{ m}$ in einer Höhe von 300 m schneiden.

Im Bild 2 hat der Gradient an der Stelle 1 ein positives und an der Stelle 2 ein negatives Vorzeichen. Als Ergebnis ist ein Verlauf der Kurve zu erwarten, der unter den gepunkteten Linien liegt, da in Abhängigkeit von Parameter α der gewichtete Mittelwert der Stützpunkte Einfluß auf den Verlauf der Schichtgrenze hat. Das Extremum müßte sich exakt in der Mitte zwischen den Stützpunkten befinden. Im Bild 3 wurde eine vollständige Schwingung modelliert. Bild 3 (links) beschreibt sie durch zwei positive Tangenteneinheitsvektoren; Bild 3 (rechts) zeigt, daß durch Berücksichtigung von nur einem Gradienten der gleiche Verlauf erzeugt werden kann.

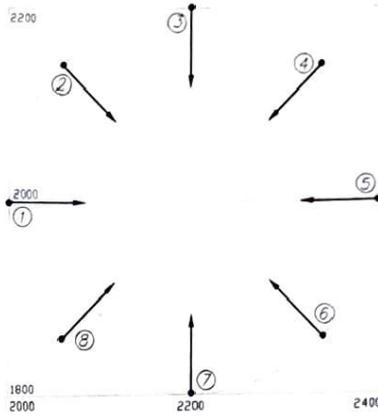
Im Bild 4 wurde ein Gradient an der Stelle 1 durch einen zusätzlichen Stützpunkt in unmittelbarer Nähe des vorhandenen Stützpunktes ersetzt. Es wird erwartet, daß das Vorhersageergebnis dem des Bildes 2 ähnelt. Bei den Versuchen betragen die söhligem Abstände und die Höhendifferenzen zwischen den benachbarten Punkten 10 m (a), 5 m (b), 1 m (c) und 1 dm (d). Es ist eine weitgehende Übereinstimmung dieser Ergebnisse mit dem Vergleichsobjekt von Bild 2 (e) zu verzeichnen. Dabei geht aus dem vergrößerten Ausschnitt im Bereich des Maximums hervor, daß mit geringer werdendem Abstand eine Annäherung an die Vergleichskurve (e) erfolgt. Wird der Abstand geringer, entstehen numerisch singuläre Matrizen durch linear abhängige Gleichungen. Nun stellt sich die Frage, weshalb ein neues Verfahren entwickelt wird,

wenn durch das Einführen eines benachbarten Stützpunktes das altbewährte Kriging zum gleichen Ergebnis führt. Es sei an dieser Stelle nur darauf hingewiesen, daß für diese Vorgehensweise eine genaue teufenmäßige Zuordnung der Stützpunkte erforderlich ist, währenddessen das Gradientenkriging lediglich Betrag und Richtung der Schwingung einer Fläche benötigt. Diese Werte können z. B. aus einer flächenhaften geophysikalischen Erkundung wesentlich zuverlässiger entnommen werden als Stützpunkte.

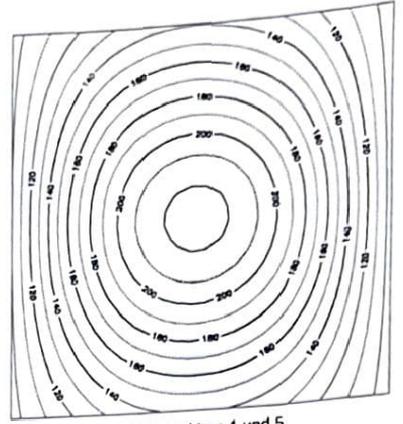
Im Bild 5 ist ein Beispiel mit mehreren vorgegebenen Stützpunkten und Gradienten dargestellt. Die Vorhersage wurde mit einem $\alpha = 0,001$ durchgeführt. Die punktierte Linie ergab sich aus der Vorhersage mit allen zur Verfügung stehenden Stützpunkten und Gradienten und diente in den weiteren Untersuchungen als Vergleichskurve. Bild 5 b zeigt den Verlauf der Schichtgrenze, der nur durch die Berücksichtigung der Stützpunkte 1, 7 und 11 sowie aller Gradienten bestimmt worden ist (a). Relevante Abweichungen von der Sollkurve entstehen im Bereich von 2 200 bis 2 600 m, wo sich lediglich die Beträge der Gradienten, jedoch nicht ihre Richtungen, ändern. Dieser Fehler würde sich ohne den Stützpunkt 7 als Parallelverschiebung auf die gesamte Kurve auswirken. Streicht man sämtliche Gradienten mit dem Anstieg Null, ergibt sich eine weitgehende Deckungsgleichheit mit der Vergleichskurve. Der Einfluß der Information Anstieg Null ist durch das Weglassen der Gradienten g und i, so daß die Muldenstruktur nur durch den Gradienten h widergespiegelt wurde, nachgewiesen worden. Es ist ebenfalls Übereinstimmung mit der Vergleichskurve zu verzeichnen. Der Schichtenverlauf b wurde durch die Nichtbeachtung einer ganzen Strukturinformation erzeugt, indem die Stützpunkte 3, 4 und 5 sowie die Gradienten c und d ignoriert wurden. Es kommt zu einer geringen Verschiebung des lokalen Minimums, die Muldenstruktur entsteht bei der Modellierung durch die Gradienten b und e.



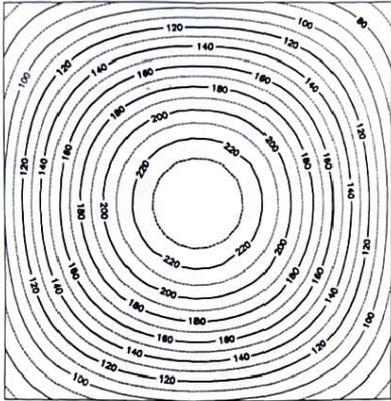
a) Raumbild eines Rotationsellipsoids



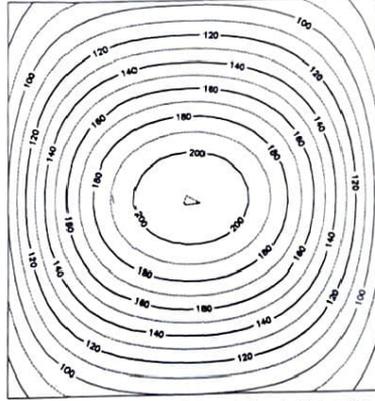
b) Mögliche Eingangsgrößen für die Vorhersage



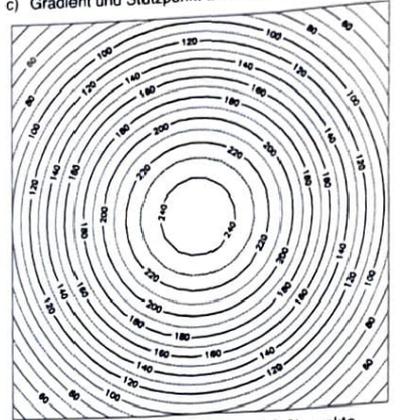
c) Gradient und Stützpunkt an 1 und 5



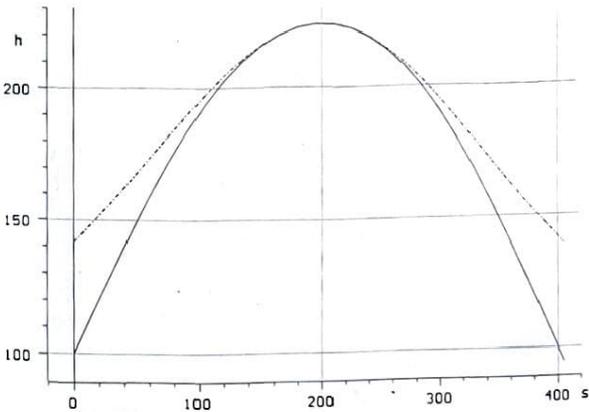
d) Gradient und Stützpunkt an 1, 3, 5 und 7



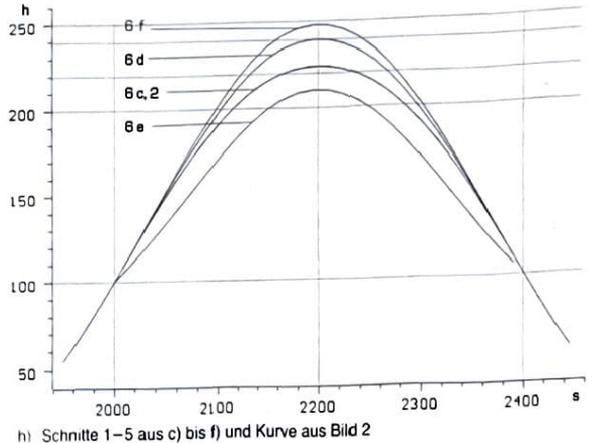
e) Gradient an 1 und 5; Stützpunkt an 1, 3, 5 und 7



f) Alle verfügbaren Gradienten und Stützpunkte



g) Schnitte 1-5 und 3-7 aus c)



h) Schnitte 1-5 aus c) bis f) und Kurve aus Bild 2

Bild 6. Einfluß der Lage bzw. Anzahl der Stützpunkte und der Gradienten.

Zweidimensionale Vorhersage

Bei der zweidimensionalen Vorhersage wird ebenfalls eine vereinfachte Form der empirischen Kovarianzfunktion benutzt.

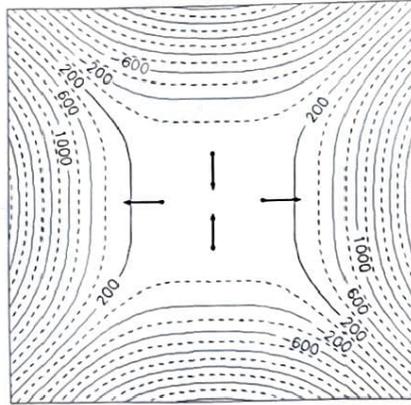
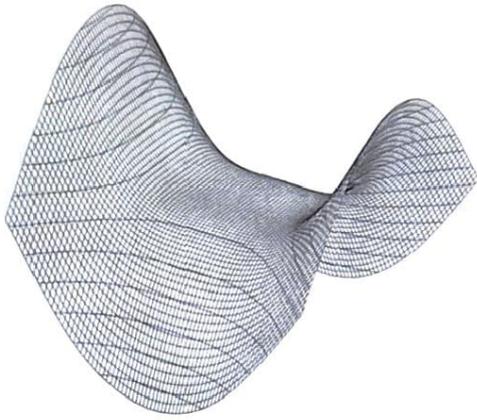
$$\sigma = e^{-\alpha^2 (\Delta x^2 + \Delta y^2)} \dots \dots \dots (2)$$

Um die Ergebnisse aus der eindimensionalen Vorhersage bei diesen Untersuchungen zum Vergleich nutzen zu können, wurde ein dem im Bild 2 dargestellten Fall ähnliches Beispiel konstruiert, dessen Raumbild im Bild 6a zu sehen ist. Die zur Modellierung verwendeten Gradienten haben jeweils den Absolutbetrag „eins“, und an den Fußpunkten liegt ein Stützpunkt mit der Höhe 100 m (Bild 6b). Der Parameter α betrug 0,005. Die Isoliniendarstellungen der Bilder 6c bis 6f (Kan-

tenlänge 405 m) entstanden durch die Berücksichtigung der folgenden Komponenten:

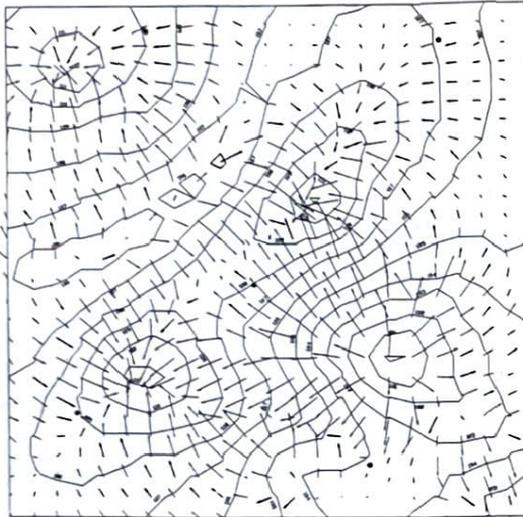
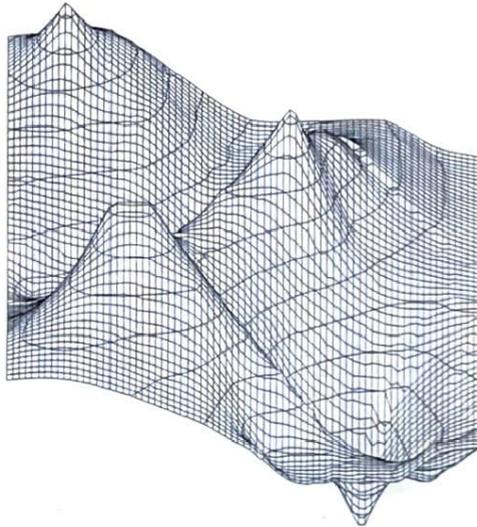
- ▷ Bild 6c: Gradienten und Stützpunkte an den Stellen 1 und 5;
- ▷ Bild 6d: Gradienten und Stützpunkte an den Stellen 1, 3, 5 und 7;
- ▷ Bild 6e: Gradienten an den Stellen 1 und 5 sowie Stützpunkte an den Stellen 1, 3, 5 und 7;
- ▷ Bild 6f: alle Gradienten und Stützpunkte.

Im Bild 6g sind die Schnitte 1-5 (ausgezogen) und 3-7 (gestrichelt) aus der Isoliniendarstellung des Bildes 6c aufgetragen. Wegen der stützpunktstreuen Vorhersage schneidet die 100-m-Niveau-Linie die Stützstellen 1 und 5, während zu beiden Seiten die Wirkung der Gradienten nachläßt. Die Schnitte im Bild 6h liegen in der Achse 1-5 und gehören zu



links: Raumbild
rechts: Vorhersageergebnis mit Eingangsgrößen

Bild 7. Strukturelement Sattelfläche.



links: Raumbild
rechts: Isoliniendarstellung und zugehöriges Gradientenfeld

Bild 8. Konstruierte topographische Fläche.

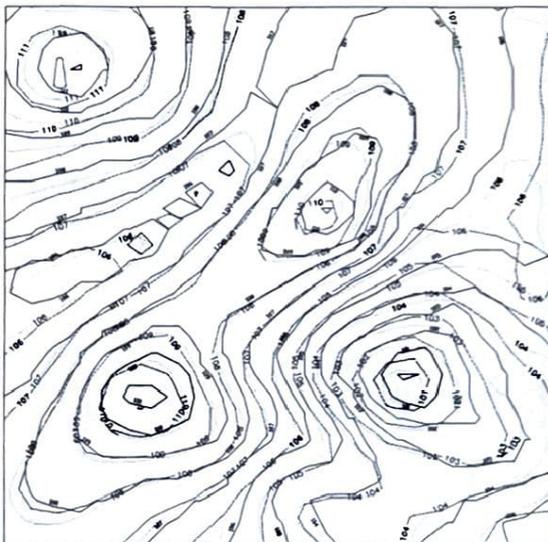


Bild 9. Vergleich der Vorhersagen mit fünf Stützpunkten und allen Gradienten bzw. mit der Hälfte der Gradienten.

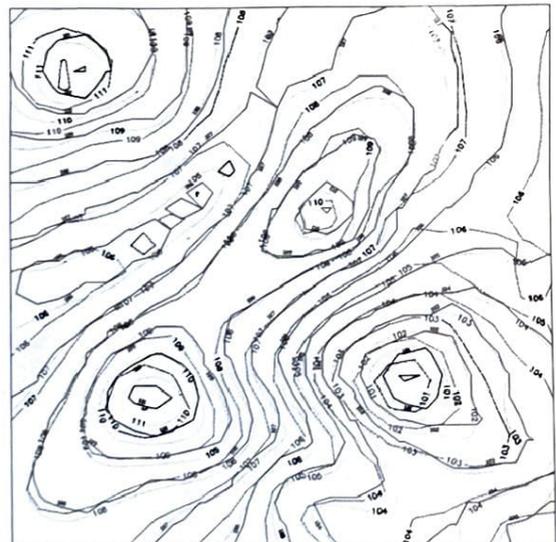
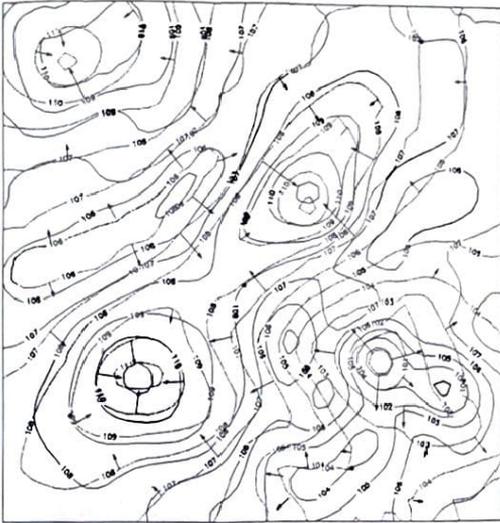
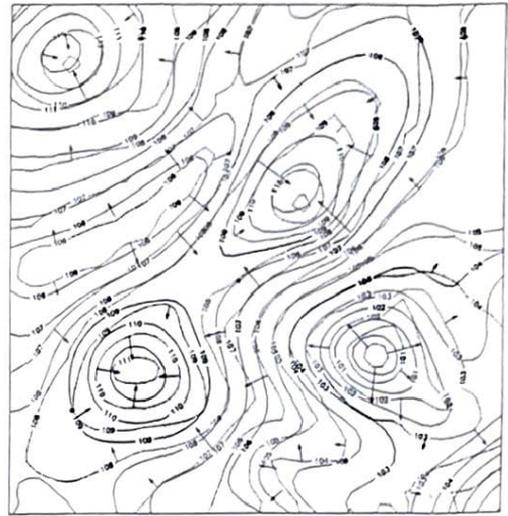


Bild 10. Vergleich der Vorhersagen mit allen Gradienten und fünf Stützpunkten bzw. mit 36 Stützpunkten.

den Isoliniendarstellungen der Bilder 6c bis 6f. Als Vergleichskurve dient die eindimensionale Vorhersage aus Bild 2, die sich erwartungsgemäß mit dem Schnitt 6c vollständig deckt. In dieser Darstellung läßt sich der Einfluß der Stütz-

punkte bzw. der Gradienten gut erkennen. Ein rotationssymmetrisches Paraboloid entsteht nur durch Gradientenkriging mit 8 Stützpunkten bzw. Gradienten (Bild 6f). Je mehr Gradienten zur Verfügung stehen, desto mehr gleicht sich das

Bild 11. Vorhersage mit $\alpha = 0,009$.Bild 12. Vorhersage mit $\alpha = 0,005$.

Maximum im Zentrum dem Höchstwert von 300 m an, der sich aus dem Schnittpunkt der verlängerten Tangenteneinheitsvektoren ergibt (Bild 6c, d, f). Mit steigender Zahl der Stützpunkte tendiert die Vorhersage zum gewichteten Mittelwert (Unterschied 6 c–6 d).

Ein weiteres grundlegendes Strukturelement ist der Sattelpunkt (Erläuterungen zu Strukturelementen, s. Menz). Deshalb wurde das Gradientenkriging mit einer einfachen Sattelfläche (Bild 7, links) getestet. Im Bild 7, rechts, sind neben dem Ergebnis des Gradientenkrigings die Gradienten mit dem Betrag „eins“ sowie an deren Fußpunkten die Stützpunkte eingezeichnet.

Da beim Testen der einzelnen Strukturelemente befriedigende Ergebnisse erzielt wurden, ist im nächsten Schritt eine topographische Fläche (Bild 8, links), die alle Strukturelemente enthält, mit dem Verfahren modelliert worden. Die Fläche wurde mit dem Darstellungsprogramm Surfer durch Eingabe von 86 Stützpunkten erzeugt. Aus dem Gridfile des Surfers (23 Zeilen \times 27 Spalten) wurden die Gradienten berechnet (Bild 8, rechts).

Im Bild 9 sind Resultate von zwei Vorhersagen mit $\alpha = 0,005$ dokumentiert. Grundlage waren fünf Stützpunkte (Verteilung in den Bildern 8 bis 12 dargestellt) und alle verfügbaren Gradienten (Ergebnis im Bild 9 gestrichelt) bzw. jeder zweite im Bild 8 gezeichnete Gradient (Ergebnis im Bild 9 punktiert). Es sollte überprüft werden, ob eine Erhöhung der Gradientenzahl die Vorhersage verbessert. Schon bei Berücksichtigung der Hälfte der verfügbaren Gradienten erhält man gut genährte Ergebnisse, die durch die hier rechenstechnisch maximal mögliche Verdichtung der Gradienten in ihrer Näherung nicht wesentlich verändert werden. Die Vermehrung der Stützpunktzahl auf 36 bringt keine relevanten Verbesserungen (punktierte Linien im Bild 10). Die gestrichelten Linien sind mit denen im Bild 9 identisch. Anhand des Beispiels aus [3, Bild 2] läßt sich der Einfluß von α sehr deutlich zeigen. Die Vorhersage von Bild 11 (durchgezogene Linie) erfolgte mit $\alpha = 0,009$. Die Muldenstruktur rechts wird nicht widergespiegelt. Die gleichen Eingangsdaten und ein $\alpha = 0,005$ liefern das im Bild 12 gezeigte Ergebnis (durchgezogene Linie). Obwohl sich die entsprechenden Niveaulinien nicht decken, sind alle Strukturelemente in der Vorhersage wiedererstanden. Die Schätzungen sind also im Gegensatz zum einfachen Kriging wesentlich von der Größe des Parameters α abhängig.

Zusammenfassung

Am Institut für Markscheidewesen der Bergakademie Freiberg wurde eine Software zur Realisierung des Gradientenkrigings mit der Programmiersprache C unter dem Betriebssystem UNIX vorerst zu Testzwecken entwickelt. Mit ihr wurde durch Anschauungsbeispiele die Wirkungsweise des Gradientenkrigings demonstriert. Es wurde ein erster experimenteller Nachweis zur Richtigkeit der theoretischen Ableitungen geführt. Es konnte gezeigt werden, daß sich über Gradienten die innere Geometrie einer Fläche erfassen läßt und daß durch die Einbeziehung von Gradienten in die Vorhersage eine Reduzierung der Stützpunkte (Bohrungen) möglich wird. Für die Schätzung reichen ausgewählte, strukturbestimmende Gradienten sowie wenige Stützpunkte aus, die der höhenmäßigen Orientierung dienen und nicht ergodisch sein müssen. Es sind weitere Untersuchungen notwendig, um die am Anfang formulierten Fragen ausreichend zu beantworten, z. B. nach Einfluß, Anzahl und Lage der Gradienten bzw. Stützpunkte.

In der nächsten Phase wird das Zusammenwirken von Co-kriging bzw. Trendberücksichtigung und Gradientenkriging getestet. Sollten auch diese Untersuchungen erfolgreich sein, kann ein weiterer programmtechnischer Ausbau des Verfahrens erfolgen.

Quellennachweis

1. Menz, J.: Geostatistische Vorhersage des Schichtenverlaufes im Gebirge auf der Grundlage von Bohrungen, Stoßbemusterungen und geophysikalischen Messungen. In: *Markscheidewesen* 98 (1991), H. 2, S. 70–73.
2. Menz, J.: Gesichtspunkte für den weiteren Ausbau geostatistischer Vorhersageverfahren. In: *Markscheidewesen* 99 (1992), H. 2, S. 217–220.
3. Menz, J.: Beiträge zur markscheidewesen-geologischen Komplexauswertung unter geostatistischen Modellannahmen. In: *Markscheidewesen* 99 (1992), H. 4, S. 320–323.
4. Menz, J.: Lagerstättenmodellierung mit dem Programmsystem Geostatistik. In: *Neue Bergbautechnik* 15 (1985), H. 11, S. 404–407.
5. Schlopiet, D. u. a.: *Automatisches Zeichnen von Isolinen*. Projektdokumentation ISOLIN. Brennstoffinstitut Freiberg, 1977, unveröffentlicht.